

E@D: Introdução ao Estudo da Paridade de Funções

10.º ano | Disciplina: Matemática A | Professor: Rui Moutinho

Ano Letivo 2019/2020

Assunto

A paridade de uma função é uma propriedade das funções reais de variável real que já tens vindo a estudar e está relacionada com a existência e com o tipo de simetria que se pode verificar nos seus respetivos gráficos cartesianos.

Esta ficha serve de orientação à manipulação de um recurso elaborado na plataforma GeoGebra. Através destes dois documentos, poderás descobrir e explorar a paridade de funções.

Nota prévia

Deverás ser capaz de cumprir esta atividade de forma autónoma. Porém, antes de começares, necessitas assegurar-te de alguns pressupostos.

Requisitos teórico-práticos

Para completares com sucesso esta atividade, precisas de recorrer aos teus conhecimentos já adquiridos, com especial importância ao estudo de funções e aos conceitos geométricos relacionados com a simetria. Além disso, necessitas de ter alguma experiência com recursos concebidos em GeoGebra. Se ainda não conheces esta ferramenta, podes pedir ajuda ao teu professor!

Requisitos técnicos

Para usar o recurso digital, basta dispor de ligação à *internet*, através de um computador pessoal (recomendado), de um *tablet* ou de um *smartphone*, desde que o dispositivo escolhido esteja equipado com um navegador (Firefox, Chrome,...).

Elementos manipuláveis do recurso digital

O recurso digital, por ser feito no GeoGebra, permite interagir com diversos componentes, uns manipuláveis, outros não. Os elementos manipuláveis (ou interativos), neste recurso, são:

- **Exemplo I**, **Exemplo II**, **Exemplo III** e **Exemplo IV**: selecionam exemplos de estudo;
- **Traçar Simetria a O** e **Traçar Simetria a Oy**: ativam/desativam o modo de traço (apenas no Exemplo IV);
- O ponto *A* aparece marcado com um pequeno quadrado vermelho (◈) e é o único que se pode mover livremente.

1 Introdução

Usa o endereço seguinte para abrires o recurso digital, antes de prosseguires com as questões:

<https://www.geogebra.org/m/hdcgmbhw>

Segue-se a primeira questão, que serve, sobretudo, para te familiarizares com os vários elementos do recurso, bem como com as entidades matemáticas presentes.

1. Assim que abres o recurso, é mostrado o gráfico de uma função, com o **Exemplo IV** já carregado.

Movimenta o ponto A e verifica o que acontece na construção.

Assinala todas as opções que estão corretas.

- ☐ A O ponto A e o ponto A' têm a mesma ordenada.
- ☐ B Os pontos A e A' têm abcissa igual.
- ☐ C Os pontos A e A' têm abcissa com igual valor absoluto.
- ☐ D M é o ponto médio do segmento $[BB']$.
- ☐ E Se x_1 é a abcissa de A , então a abcissa de A' é $-x_1$ (ou seja, simétrico de x_1).

2 Exemplo I: Função par

No final desta secção, deverás ter uma ideia do que é uma função par.

Carrega no botão **Exemplo I**, explora a construção e responde às questões seguintes.

2. Os pontos B e B' têm sempre a mesma ordenada?

- ☐ A Sim
- ☐ B Não

3. A abcissa de B' é simétrica da abcissa de B ?

- ☐ A Sim
- ☐ B Não

4. Uma função f é par quando quaisquer dois objetos simétricos têm a mesma imagem.

Assinala todas as opções seguintes que são verdadeiras.

- ☐ A $f(-3) = f(3)$
- ☐ C $f(-(-1)) = f(1)$
- ☐ E $f(0) = 0$
- ☐ B $f(-(-1)) = f(-1)$
- ☐ D $f(2) = f(-1)$

3 Exemplo II: Função ímpar

Neste próximo exemplo, vamos observar um caso de uma função ímpar.

Aciona o botão **Exemplo II**, explora a construção e responde às questões que se seguem.

5. Os pontos B e B' têm sempre a mesma ordenada?

- ☐ A Sim
- ☐ B Não

6. A abscissa de B' é simétrica da abscissa de B ?

☐ (A) Sim

☐ (B) Não

7. A ordenada de B' é simétrica da ordenada de B ?

☐ (A) Sim

☐ (B) Não

8. O ponto médio de $[BB']$ está sempre na origem do referencial?

☐ (A) Sim

☐ (B) Não

9. Uma função g é ímpar quando quaisquer dois objetos simétricos têm, também, imagens simétricas. Assinala todas as opções que estão corretas.

☐ (A) $g(-3) = g(3)$

☐ (C) $g(-3) = -g(3)$

☐ (E) $-g(4) = g(-4)$

☐ (B) $g(-3) = -g(-3)$

☐ (D) $g(0) = 0$

4 Exemplo III: Que tipo é?

Depois de descobrirmos como se comportam os exemplos com função par e com função ímpar, vamos, através do terceiro exemplo, procurar descobrir o tipo da função apresentada.

Carrega no botão **Exemplo III** e manipula o ponto A . Observa e inspeciona com atenção, tendo em conta o que já verificaste nos exemplos anteriores, e responde à questão seguinte.

10. A função

☐ (A) é par.

☐ (B) é ímpar.

☐ (C) não é par nem ímpar.

5 Exemplo IV: Como é ou como poderá ser?

Finalmente, estamos em condições de visitar o Exemplo IV.

Neste exemplo, podes ver, além do gráfico cartesiano da função e dos botões de exemplo, outros dois que servem para ativar e desativar o traço. O traço resulta da traçagem, um processo do GeoGebra para decalcar a trajetória de um ponto que se movimenta. Neste caso, uma das trajetórias faz-se segundo a simetria em relação ao eixo das ordenadas (Oy) e a outra é feita segundo a simetria em relação à origem (O). Cada uma das operações pode ser ativada ou desativada com os botões textuais que aparecem apenas neste exemplo.

Explora as funcionalidades antes de prosseguires a atividade. Para isso, carrega em cada um dos botões de traço $\left(\begin{array}{c} \text{Traçar} \\ \text{Simetria a } O \end{array} \right)$ e $\left(\begin{array}{c} \text{Traçar} \\ \text{Simetria a } Oy \end{array} \right)$ e verifica o que acontece ao moveres o ponto A . Consegues perceber o que está a acontecer? Cada botão faz o seu efeito com a sua própria cor: um dourado e outro azul.

Depois de te ambientares com a funcionalidade de traçagem, repõe o estado inicial, carregando novamente em **Exemplo IV** ou recarregando a página.

Agora que o exemplo está no estado inicial, podemos começar a exploração final e responder às questões finais.

11. A função representada

- ☐ (A) é par. ☐ (B) é ímpar. ☐ (C) não é par nem ímpar.

12. Ativa o Traçar
Simetria a Oy e movimenta o ponto A .

Se o gráfico cartesiano da função, para $x > 0$, seguisse o comportamento assinalado a azul, a função

- ☐ (A) seria par. ☐ (B) seria ímpar. ☐ (C) não seria par nem ímpar.

13. Ativa o Traçar
Simetria a O e movimenta o ponto A .

Se o gráfico cartesiano da função, para $x > 0$, seguisse o comportamento assinalado a dourado, a função

- ☐ (A) seria par. ☐ (B) seria ímpar. ☐ (C) não seria par nem ímpar.

6 Verifica as respostas

Depois de cumprires a tarefa e de estares confiante nas respostas dadas, pede ao teu professor para fazer a correção. Também podes conferenciar com os teus colegas e comparar conclusões!

Na página seguinte, podes consultar uma síntese acerca dos conceitos que aqui exploramos.

Síntese teórica

A paridade de uma função pode ser definida de forma algébrica ou geométrica.

Pode-se recorrer a mnemónicas que ajudam a memorizar parte do comportamento associado à paridade de uma função. Porém, **nota bem** que o recurso a mnemónicas serve apenas para auxiliar e **nunca** para provar ou demonstrar resultados!

Para justificares se uma função é par ou se é ímpar, é necessário recorrereres à definição, seja ela algébrica ou geométrica!

Função Par: definição algébrica

Uma função par é tal que a *imagem do simétrico* de um qualquer objeto é *igual à imagem* desse mesmo objeto. Ou seja, uma função f é par quando:

$$\forall x, -x \in D_f, f(-x) = f(x) \text{ (A imagem do simétrico de } x \text{ é igual à imagem de } x.) \quad (1)$$

Função Par: definição geométrica

O gráfico cartesiano de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Função Par: mnemónica

Numa função par, o sinal do objeto não tem impacto na imagem da função: é como se o sinal desaparecesse! (Repara na expressão 1.)

Função Ímpar: definição algébrica

Uma função ímpar é tal que a *imagem do simétrico* de um qualquer objeto é *igual ao simétrico da imagem* desse mesmo objeto. Ou seja, uma função g é ímpar quando:

$$\forall x, -x \in D_g, g(-x) = -g(x) \text{ (A imagem do simétrico de } x \text{ é igual ao simétrico da imagem de } x.) \quad (2)$$

Função Ímpar: definição geométrica

O gráfico cartesiano de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do referencial.

Função Ímpar: mnemónica

Numa função ímpar, o sinal negativo pode aparecer no objeto ou na imagem, mas nunca nos dois ao mesmo tempo: é como se o sinal saltasse de dentro para fora e vice-versa! (Repara na expressão 2.)

—

Desafio

Poderão existir funções reais de variável real que sejam pares e ímpares, simultaneamente? Se sim, consegues apresentar um exemplo?

— Fim —